

Mathématiques		 <h1 style="margin: 0;">Devoir de Synthèse N°1</h1>
Lycée Ghannouch		
4 <sup>ème</sup> Math	Durée : 3 heures	Prof: Taieb
Date : le 04/12/2012	Coefficient : 4	

### Exercice n°1 : (2pts)

Les trois questions suivantes sont indépendantes. Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions données. En justifiant votre réponse.

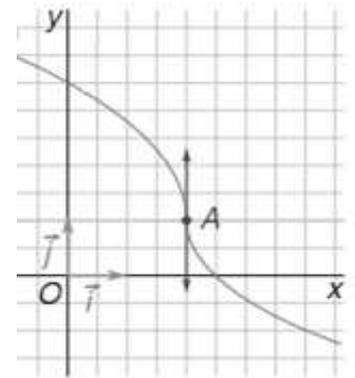
1- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , strictement croissante sur  $[0, 1]$

Et dérivable sur  $]0, 1[$ . Si l'on sait de plus que  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 1$ , alors :

- a) L'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ .
- b) L'équation  $f'(x) = -2$  admet au moins une solution dans  $]0, 1[$ .

2- (C) est la courbe représentative d'une fonction  $f$  passant par  $A(2,1)$

- a)  $f$  n'est pas dérivable en 2
- b) A est un point d'inflexion de (C)



### Exercice n°2 : (4pts)

A- On considère, dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = 0$

- 1) Vérifier que 1 est une solution de (E)
- 2) a- Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :

$$z^3 - (3+3i)z^2 + (1+6i)z + 1 - 3i = (z-1)(z^2 + bz + c)$$

b- Résoudre, dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E)

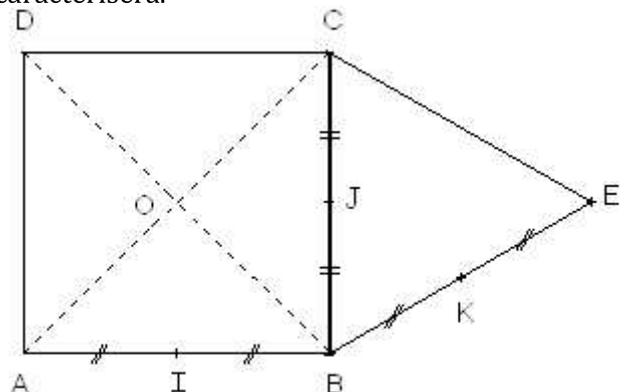
B- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' \text{ telle que : } z' = \overline{iz} + 1 + i$$

- 1) Montrer que  $f$  est une isométrie
- 2) Montrer que  $f$  n'admet pas des points invariants
- 3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives  $1 ; -1 ; 1+2i$  et  $1+i$ 
  - a- Montrer que  $f(A) = C$  et  $f(B) = A$
  - b- Montrer que  $f$  est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

### Exercice n°3 : (4pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.  
 Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré direct de centre O et BEC est un triangle équilatéral direct.  
 Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [CB] et [EB].



- 1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  qui envoie A sur C et B sur D.  
 b- Caractériser  $f$ .  
 c- Déterminer la droite  $\Delta$  telle que  $f = S_{\Delta} \circ S_{(OI)}$
- 2) Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante  $g$  qui envoie A sur C et B sur D.
- 3) a- Déterminer  $(g \circ f)(C)$  et  $(g \circ f)(D)$

b- Caractériser  $g \circ f$

c- En déduire la forme réduite de  $g$

4) Soit  $h$  l'antidépacement qui envoie  $B$  sur  $E$  et  $C$  sur  $B$

a- Déterminer  $h(J)$  et  $(h \circ h)(C)$

b- Montrer que  $h$  est une symétrie glissante et déterminer la forme réduite.

**Exercice n°4 : (6pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1-a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Interpréter ces résultats graphiquement

b) Montrer que  $f'(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$

c) Montrer que pour tout  $x \in [2, 3]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

2-a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]2, 3[$

b) Tracer dans un repère orthonormé la courbe  $(C_f)$  de  $f$

3-a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

b) Montrer que  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \quad \forall x \in J$

c) Tracer la courbe  $(C_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$  dans le même repère que  $(C_f)$

4- Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3$

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$

c) En déduire  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d) En déduire que  $(u_n)$  est convergent et calculer sa limite.

**Exercice n°5 : (4pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$  par  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1- a) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[1, +\infty[$

2- a)  $f^{-1}$  est-elle dérivable à droite en 1. Justifier

b) Déterminer  $f^{-1}(2)$  et  $f^{-1}(\sqrt{2})$

c) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en  $\sqrt{2}$  et déterminer  $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

3- Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que  $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in ]1, +\infty[$